12. cvičení - řešení

5. 1. 2023

Příklad 1 a

$$f(x) = \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|}$$

Postupujme podle návodu uvedeném v teorii ke cvičení 11.
1. definiční obor a spojitost
$D(f) = \mathbb{R}$
f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicita Funkce je sudá, neboť

$$f(-x) = \sqrt[4]{|(-x)^4 - 5(-x)^2 + 4|} = \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|} = f(x).$$

Funkce není periodická. Dále už budeme díky sudosti uvažovat chování jen na intervalu $[0, \infty)$

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \sqrt[4]{|1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}|} \overset{\text{VOLSF + VOAL}}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|} \overset{\text{spojitost f v 0}}{=} \sqrt{2}$$

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = (\sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|})' = \frac{x(-5 + 2x^2)(4 - 5x^2 + x^4)}{2|4 - 5x^2 + x^4|^{\frac{7}{4}}}$$

Derivace není definována pro x takové, že $4 - 5x^2 + x^4 = 0$, což jsou $0 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, tedy pro $x = \pm 1, \pm 2$. Tam se ji pokusíme dopočítat z definice:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt[4]{|(1+h)^4 - 5(1+h)^2 + 4|} - \sqrt[4]{|1 - 5 + 4|}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt[4]{|(1+h)^4 - 5(1+h)^2 + 4|}}{h} \overset{\text{o dělení kladnou nulou}}{=} \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt[4]{|(1+h)^4 - 5(1+h)^2 + 4|} - \sqrt[4]{|1 - 5 + 4|}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt[4]{|(1+h)^4 - 5(1+h)^2 + 4|}}{h} \overset{\text{o dělení zápornou nulou}}{=} -\infty \end{aligned}$$

Analogicky spočteme $f'_-(2) = -\infty$, $f'_+(2) = \infty$. V těchto bodech neexistuje derivace a proto v nich budeme očekávat extrém ($f(1) = f(2) = 0$).

Pro taková x, kde je derivace definovaná, vyšetříme, kde je rovna 0. To je v případě, že $0 = x(-5+2x^2)(4-5x^2+x^4)$, tedy pro $x = 0$ a $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Dále vidíme, že f' je záporná na $[0,1]$ a na $[\sqrt{\frac{5}{2}}, 2]$, a kladná na $[1, \sqrt{\frac{5}{2}}]$ a na $[2, \infty)$. Potom f je klesající na $[0,1]$, rostoucí na $[1, \sqrt{\frac{5}{2}}]$, klesající na $[\sqrt{\frac{5}{2}}, 2]$ a rostoucí na $[2, \infty)$.

Dále v bodech 1 a 2 jsou minima (globální, hodnota 0), v bodech 0 a $\sqrt{\frac{5}{2}}$ jsou lokální maxima ($f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$). Obor hodnot je $[0, \infty)$.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

$$f''(x) = \left(\frac{x(-5+2x^2)(4-5x^2+x^4)}{2|4-5x^2+x^4|^{\frac{7}{4}}}\right)' = \frac{-10x^4+23x^2-40}{4|4-5x^2+x^4|^{\frac{7}{4}}}$$

Definiční obor druhé derivace je shodný s definičním oborem první derivace. Dále je nulová právě když $10x^4 - 23x^2 + 40 = 0$. Spočteme diskriminant $D = 23^2 - 4 \cdot 10 \cdot 40 = -1071$, tedy tato situace nikdy nenastane a druhá derivace je vždy záporná.

Pak funkce nemá inflexní body a je ryze konkávní na intervalech $[0,1]$ (ze sudosti na $[-1,1]$), $[1,2]$ a $[2,\infty)$.

6. asymptoty Počítejme podle věty 8 z teorie

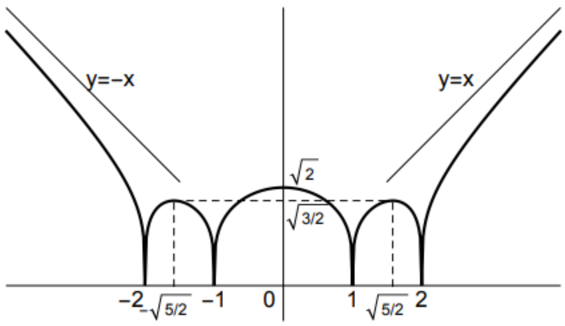
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{|x^4-5x^2+4|}}{x} = \sqrt[4]{|1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}|} \overset{\text{VOLSF} + \text{VOAL}}{=} 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{|x^4-5x^2+4|} - x = \lim_{x\to\infty} x \cdot \left(\sqrt[4]{|1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}|} - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{|1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}|-1}{(|1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}|)^{\frac{3}{4}} + (|1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}|)^{\frac{2}{4}} + (|1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}|)^{\frac{1}{4}} + 1} = 0$$

Tedy asympotou je přímka $y = x$, neboť $a = 1$ a $b = 0$.

7. graf

Graf:



Příklad 1 b
výsledek zde

$$f(x) = \frac{9^x - 54}{(3^x - 12)^2}$$

Postupujme podle návodu uvedeném v teorii ke cvičení 11.
1. definiční obor a spojitost
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\log_3 12\}$
f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicita

$$f(-x) = \frac{9^{-x} - 54}{(3^{-x} - 12)^2}$$

Zřejmě neplatí ani $f(-x) = f(x)$, ani $f(-x) = -f(x)$, tedy f není ani sudá, ani lichá. Zřejmě není ani periodická.

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{9^x - 54}{(3^x - 12)^2} \overset{\text{VoAL}}{=} \frac{0 - 54}{(0 - 12)^2} = \frac{-54}{144} = \frac{-3}{8}$$

$$\lim_{x\to\log_3 12-} f(x) \overset{\text{VoAL}}{=} 90 \cdot \lim_{x\to\log_3 12-} \frac{1}{(3^x - 12)^2} = 90 \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x\to\log_3 12+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{9^x\left(1 - 54 \cdot 9^{-x}\right)}{9^x \cdot \left(1 - 24 \cdot 3^{-x} + 144 \cdot 9^{-x}\right)} = 1$$

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = \left(\frac{9^x - 54}{(3^x - 12)^2}\right)' = \frac{9^x \log 9 \cdot (3^x - 12)^2 - (9^x - 54) \cdot 2\,(3^x - 12)\,3^x \cdot \log 3}{(3^x - 12)^4} =$$

$$= \frac{108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x}{(3^x - 12)^3}$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x}{(3^x - 12)^3} = 12 \cdot \log 3 \cdot 3^x \cdot \frac{9 - \log 3 \cdot 3^x}{(3^x - 12)^3} > 0$$

$$\iff \frac{9 - \log 3 \cdot 3^x}{(3^x - 12)^3} > 0 \iff x \in \left(\log_3 \frac{9}{2}, \log_3 12\right)$$

f na $(-\infty, \log_3 \frac{9}{2}) \cup (\log_3 12, \infty)$ klesá a na $(\log_3 \frac{9}{2}, \log_3 12)$ roste.
Globální minimum je bod $\left[\log_3 \frac{9}{2}, -\frac{3}{5}\right]$.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

$$f''(x) = \left(\frac{108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x}{(3^x - 12)^3}\right)' =$$
$$\frac{\left(108 \cdot \log^2 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log^2 9 \cdot 9^x\right)(3^x - 12)^3 - (108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x)\, 3 \cdot (3^x - 12)^2 \cdot \log 3 \cdot 3^x}{(3^x - 12)^6}$$

$$f'' > 0 \iff$$
$$\left(108 \cdot \log^2 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log^2 9 \cdot 9^x\right)(3^x - 12)^3 - (108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x)\, 3 \cdot (3^x - 12)^2 \cdot \log 3 \cdot 3^x > 0$$
$$\iff$$
$$(3^x - 12)^2 \left(\left(108 \cdot \log^2 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log^2 9 \cdot 9^x\right)(3^x - 12) - (108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x)\, 3 \cdot \log 3 \cdot 3^x\right) > 0$$
$$\iff \log 3 \cdot 3^x \left((108 \cdot \log 3 - 24 \cdot \log 9 \cdot 3^x)(3^x - 12) - 3\,(108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x)\right) > 0$$
$$\iff (108 \cdot \log 3 - 24 \cdot \log 9 \cdot 3^x)(3^x - 12) - 3\,(108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot \log 9 \cdot 9^x) > 0$$
$$\iff 108 \cdot \log 3 \cdot 3^x - 12 \cdot 108 \cdot \log 3 - 24 \cdot \log 9 \cdot 9^x + 288 \cdot \log 9 \cdot 3^x - 3 \cdot 108 \cdot \log 3 \cdot 3^x + 36 \cdot \log 9 \cdot 9^x > 0$$
$$\iff 24y^2 + 360 \cdot y - 1296 > 0 \text{ pro } y := 3^x$$
$$\iff y^2 + 15y - 54 > 0 \text{ pro } y := 3^x \iff y \in (-\infty, -18) \cup (3, \infty) \text{ pro } y := 3^x \iff x > 1$$

f je na $(-\infty 1)$ konkávní a na $(1, \log_3 12)$ a na $(\log_3 12, \infty)$ konvexní.
Inflexní bod je $[1, -\frac{5}{9}]$.

6. asymptoty
Spočtěme dle definice asymptoty v nekonečnech.

$$a_\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9^x - 12}{(3^x-12)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{12}{9^x}}{x\left(1 - \frac{24}{3^x} + \frac{144}{x}\right)} \overset{\text{VoAL + spoj.}}{=} 0$$
$$b_\infty = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$
$$a_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{9^x - 12}{(3^x-12)^2}}{x} \overset{\text{VoAL}}{=} 0$$
$$b_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{8}$$

Asymptota v ∞ je $y = 1$, asymptota v $-\infty$ je $y = -\frac{3}{8}$.

7. graf

Graf: